1. Дано натуральное $n > 2$. Число $a > n^2$ таково, что среди чисел $a+1, a+2, \dots, a+n$ есть кратные каждого из чисел $n^2+1,\ n^2+2, \dots, n^2+n$. Докажите, что $a > n^4 - n^3$.

2. Даны n > 3 попарно взаимно простых чисел. Известно, что при делении произведения любых $n-1$ из них на оставшееся число получается один и тот же остаток r. Докажите, что $r < n-2$.

3. Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Положим $b_i = (a_i - a_1)(a_i - a_2) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n)$. Докажите, что $\text{НОК}(b_1, \dots\ b_n)$ делится на $(n-1)!$

4. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел a и b, для которых $a^8 + b^4 + 1$ делится на ab.

5. Найдите все натуральные числа n такие, что для любых двух его взаимно простых делителей a и b число $a + b - 1$ также является делителем n.

6. Можно ли найти натуральные числа a и b такие, что a не делит $b^n - n$ ни при каком натуральном n?

7. Для конечного непустого множества простых чисел P обозначим $m(P)$ наибольшее количество последовательных натуральных чисел, каждое из которых кратно хотя бы одному числу из P.

Докажите, что $m(P) < (|P| + 1)(2^{|P|} - 1)$

8. У натурального числа n ровно k различных простых делителей. Докажите, что найдется натуральное число a, $1 < a < \frac{n}{k} + 1$, такое, что $a(a-1) \vdots n$.

9. Дано конечное множество простых чисел P. Докажите, что найдется натуральное число x такое, что оно представляется в виде $x = a^p + b^p$ (с натуральными a, b) тогда и только тогда, когда $p \in P$.

10.Даны натуральные числа m и n. Докажите, что найдется бесконечно много пар натуральных чисел (a, b), для которых $a + b | am^a + bn^b$, и $\text{НОД}(a, b) = 1$.

11. Даны натуральные числа x и y из отрезка $[2; 100]$. Докажите, что при некотором натуральном n число $x^{2^n} + y^{2^n}$ составное.

12. Для натурального a обозначим через P(a) наибольший простой делитель числа $a^2 + 1$. Докажите, что существует бесконечно много троек различных натуральных чисел a, b, c таких, что P(a) = P(b) = P(c).

13. Для натурального n обозначим $S_n = 1! + 2! + \dots + n!$. Докажите, что при некотором n у числа S_n есть простой делитель больший 10^{2013}.

14. Можно ли найти 2013 последовательных натуральных чисел, ни одно из которых не делится на сумму своих цифр?

15. Может ли произведение миллиарда последовательных натуральных чисел быть равно произведению двух миллиардов последовательных натуральных чисел?

16. Докажите, что для любой перестановки $a_1, a_2 \dots, a_n, \dots$ натурального ряда найдется бесконечно много i, для которых $\text{НОД}(a_i, a_{i+1}) < \frac{3}{4}i$.

17. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2 \dots, a_n, \dots$ задается следующим образом:

$a_1 = 1$, а если $n \geq 2$, то a_n - это наименьшее натуральное число, не встречающееся среди чисел $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ и такое, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ делится на n. Докажите, что $a_{a_n} = n$ при всех n.

18. Дана функция $f(x)$, значение которой при любом целом x целое. Известно, что для любого простого числа p существует такой многочлен $Q_p(x)$ степени, не превышающей 2013, с целыми коэффициентами, что $f(x) - Q_p(x)$ делится на p при любом целом x. Верно ли, что существует многочлен $g(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $g(n) = f(n)$ для любого целого n?

19. Дана бесконечная последовательность целых чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$ Известно, что для любых различных натуральных m, n $a_m - a_n$ делится на $m - n$ и существует многочлен $P(x)$ такой, что $|a_n| < P(n)$ для любого натурального n. Докажите, что существует многочлен $Q(x)$ такой, что $a_n = Q(n)$ для любого натурального n.

19. Про многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами известно, что $P(0) = 0$ и $\text{НОД}(P(0), P(1), P(2), \dots) = 1$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n, для каждого из которых $\text{НОД}(P(n) - P(0), P(n+1) - P(1), P(n+2) - P(2), \dots) = n$.

20. Даны многочлены $f(x)$ и $g(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, m - наибольший коэффициент$f(x)$. Известно, что для некоторых натуральных чисел a, b имеют место равенства $f(a) = g(a)$ и $f(b) = g(b)$ Докажите, что если $b > m$, то многочлены $f(x)$ и $g(x)$ совпадают.

21. Даны наборы целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $x_1, x_2, \dots, x_n$ и натуральное число $r \geq 2$. Оказалось, что $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^k = 0$ для любого натурального k, не превосходящего r. Докажите, что

$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^m \equiv 0 \ (mod\ m)$ для любого $m \in \{r+1, r+2, \dots, 2r+1\}$.

22. Дано натуральное число $n \geq 2$. Докажите, что если число $k^2 + k + n$ простое для любого целого k, $0 \leq k \leq \left[\sqrt{\frac{n}{3}}\right]$ то число $k^2 + k + n$ простое для всех целых k от 0 до $n - 2$.

23. Существует ли в $\mathbb{F}_{101}$ перестановочный многочлен степени 10? ($\mathbb{F}_{101}$ - поле вычетов по модулю 101, многочлен называется перестановочным, если $f(x) \neq f(y)$ для различных x и y из $\mathbb{F}_{101}$).

24. Для любого натурального n и неотрицательного $i, 0 \leq i \leq n$ обозначим $c(n, i)$ остаток от деления C_n^i на 2. Для натуральных k и q определим $f(k, q) = \sum_{i=0}^{n} c(k, i) q^i$. Докажите, что если $f(m, q) | f(n, q)$ для некоторых натуральных m, n и q, не равного степени двойки, уменьшенной на 1, то $f(m, r) | f(n, r)$ для любого натурального r.

25. Известно, что многочлен $(x+1)^n - 1$ делится на некоторый многочлен $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + c_{k-2}x^{k-2} + \dots + c_1 x + c_0$ четной степени k, у которого все коэффициенты – целые нечетные числа. Докажите, что n делится на $k + 1$.

26. Даны многочлены $f(x)$ и $g(x)$ с целыми коэффициентами и единичными свободными членами. Оказалось, что если для некоторых целых чисел m и n числа $f(m)$ и $f(n)$ взаимно просты, то и $g(m)$ и $g(n)$ тоже взаимно просты. Докажите, что $f(x)^k \vdots g(x)$ для некоторого натурального k.

27. Для многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами обозначим $r(2i-1)$ остаток от деления $P(2i-1)$ на 1024. Последовательность $r(1), r(3), \dots, r(1023)$ назовем *полной,* если в ней каждое нечетное число от 1 до 1024 встречается ровно один раз. Докажите, что существует не более 2^{35} *полных* последовательностей.

28. Рассмотрим множество унитарных многочленов степени n с коэффициентами из множества $\{1,2,..,n!\}$. Многочлен $f(x)$ из этого множества назовем *простым,* если для любого натурального k в последовательности $f(1), f(2), f(3), \dots$ встретится бесконечно много чисел, взаимно простых с k. Докажите, что *простые* многочлены составляют не больше 75% и не меньше 71% от размера рассматриваемого множества.